

De perihelium precessie van Mercurius

Mercurius is de dichtst bij de zon staande planeet in ons zonnestelsel. Van alle planeten in ons zonnestelsel beschrijft Mercurius de baan met de grootste excentriciteit ($e=0,21$). De afstand tot de zon varieert tussen 46 en 70 miljoen kilometer.

In de 19de eeuw merkte de Franse astronoom Urbain Le Verrier op dat de baan van Mercurius geen ellips was, zoals de wetten van Newton voorspellen. Le Verrier merkte namelijk dat de baan van Mercurius een rozet beschrijft. Dit betekent dat de ellipsvorm zelf in beweging is en rondom de zon draait. Dit verschijnsel wordt ook wel perihelium precessie genoemd¹. Deze perihelium precessie bedraagt in totaal 574 boogseconden per eeuw. Dit effect was voor het grootste deel te verklaren met behulp van de wetten van Newton, als gevolg van de invloed van de zwaartekracht van de andere planeten op de baan van Mercurius. Men vermoedde dat de zwaartekracht van een onbekende planeet, of planetoïdengordel tussen Mercurius en de zon het resterende deel van de periheliumprecessie kon verklaren. Er werd vergeefs naar deze planeet gezocht, die zelfs al een naam had: Vulcanus.

Uiteindelijk was het Albert Einstein die een verklaring vond voor de resterende deel van de perihelium precessie. Volgens de algemene relativiteitstheorie wordt de ruimtetijd gekromd door aanwezige massa zoals bijvoorbeeld de zon. Hoe groter de massa, hoe sterker deze kromming en als gevolg van de kromming van ruimtetijd ontstaan er afwijkingen van de ellipsbaan.

Einstein was in staat om met behulp van de algemene relativiteitstheorie te voorspellen dat deze afwijking gelijk was aan 43 boogseconden per eeuw. Deze waarde kwam overeen met het resterende deel van de perihelium precessie. Hiermee leverde Einstein het eerste experimentele bewijs voor zijn nieuwe theorie.

Bron: wikipedia

¹Via deze link kun je een animatie van dit verschijnsel zien: <https://bit.ly/2Nvv6hY>

Bij deze activiteit ga je onderzoeken wat de invloed is van de kromming van de ruimtetijd op de baan van Mercurius. Deze activiteit bestaat uit de volgende onderdelen:

1. Een **numeriek model** van de baan van Mercurius waarmee je de baan van Mercurius gaat bestuderen. Dit model is gebaseerd op de klassieke wetten van Kepler en Newton.
2. Een **schaalmodel** waarmee het effect van kromming op de baan van Mercurius inzichtelijk gemaakt wordt.
3. Een **rekenopgave** waarin je de grootte van het effect van kromming op de baan van Mercurius gaat berekenen.

Relevante voorkennis:

- De opbouw van het zonnestelsel.
- Aphelium en perihelium.
- Ellips(baan) en excentriciteit.

Deze activiteit sluit aan bij de volgende CE-domeinen:

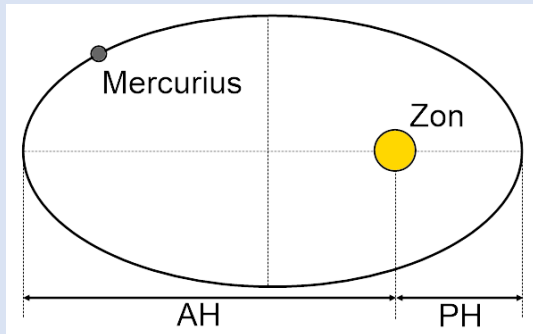
- A7, A11 t/m A15, C1, C3 en H

Na deze activiteit kun je:

- de **perihelium** van Mercurius bepalen met behulp van een numeriek model;
- verklaren waarom kromming van ruimtetijd leidt tot een extra bijdrage aan de **precessiehoek**;
- de extra **precessiehoek** van Mercurius verklaren met behulp van een papieren schaalmodel;
- uitleggen hoe de **precessiehoek** afhangt van de massa van de zon;
- de **precessiehoek** berekenen.

1. Numeriek model

Een belangrijke test voor de algemene relativiteitstheorie was de voorspelling die Einstein deed wat betreft de verschuiving van de perihelium van Mercurius, ook wel perihelium precessie genoemd. De baan van Mercurius is bij benadering een perfecte ellips (zie figuur 1). In figuur 1 zijn ook het perihelium (PH) en aphelium (AH) aangegeven.

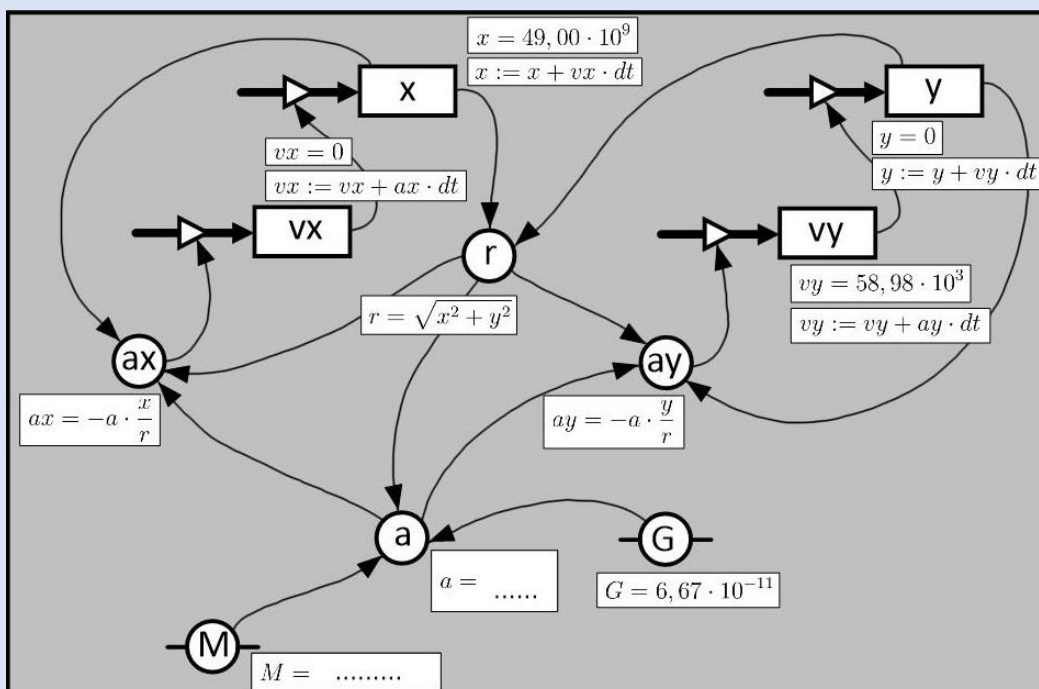


Figuur 1

Je kunt de baan van Mercurius simuleren met behulp van een computermodel. Het computermodel is weergegeven in de figuren 2 en 3.

Modelregels	Startwaarden (SI)
1 $r := \sqrt{x^2 + y^2}$	$M = \dots$
2 $a := \dots$	$x = 46,00e9$
3 $ax := -a \cdot x/r$	$y = 0$
4 $ay := -a \cdot y/r$	$vx = 0$
5 $vx := vx + ax \cdot dt$	$vy = 58,98e3$
6 $vy := vy + ay \cdot dt$	$G = 6,67e-11$
7 $x := x + vx \cdot dt$	$t = 0$
8 $y := y + vy \cdot dt$	$dt = 5e3$
9 $t := t + dt$	

Figuur 2



Figuur 3

2p1. Voer de volgende opdrachten uit:

- Vul de modelregel voor $M = \dots$ aan.
- Vul de modelregel voor $a := \dots$ aan.

Ruimte voor een antwoord:

2p2. Leg uit waarom geldt: $ax = -a \cdot x/r$.

Ruimte voor een antwoord:

De begincoördinaten van Mercurius in dit computermodeel zijn $(46,00 \cdot 10^9, 0)$.

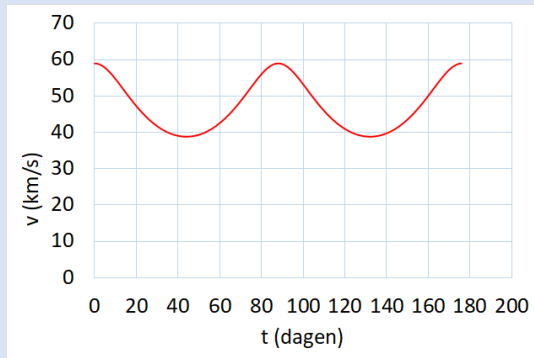
2p3. Leg uit wat de x- en de y-coördinaat van de zon zijn volgens dit model.

Ruimte voor een antwoord:

Completeer het Coach model dat bij deze opdracht hoort. Simuleer nu de beweging van Mercurius om de zon.
2p4. Bepaal met behulp van de resultaten van de simulatie de waarden van het aphelium en het perihelium. Leg daarbij in beide gevallen duidelijk uit hoe je aan je antwoord komt.

Ruimte voor een antwoord:

De baansnelheid van Mercurius is met behulp van het computer model bepaald (zie figuur 4). Figuur 4 staat ook afgebeeld op de uitwerkbijlage.



Figuur 4

4p5. Bepaal de baanstraal van Mercurius met behulp van figuur 4 op de uitwerkbijlage en vergelijk je antwoord met de waarde die in Binas staat.

Ruimte voor een antwoord:

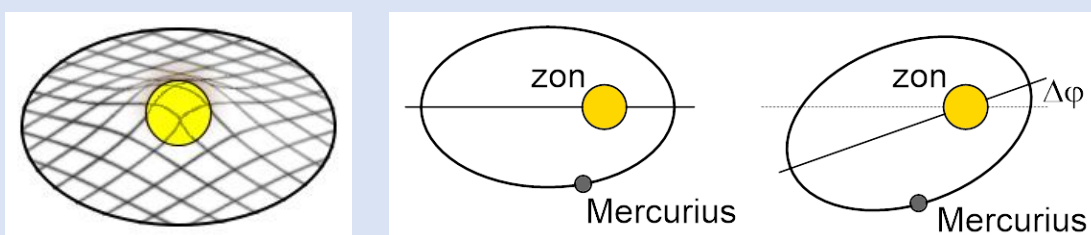
2. Schaalmodel

Het perihelium precessie effect was voor het grootste deel te verklaren met behulp van de wetten van Newton. Volgens de klassieke wetten was dit namelijk het gevolg van de invloed van de zwaartekracht van de andere planeten. Er was echter een duidelijk verschil met de waargenomen perihelium precessie (zie tabel 1). Met behulp van de algemene relativiteitstheorie kon dit verschil goed worden verklaard.

Oorzaak perihelium precessie van Mercurius	Perihelium precessie (boogseconden per eeuw)
Aantrekkingskracht van andere hemellichamen in het zonnestelsel (newtoniaans)	532
Afwijking met metingen	42
Kromming van de ruimtetijd (algemene relativiteitstheorie)	43

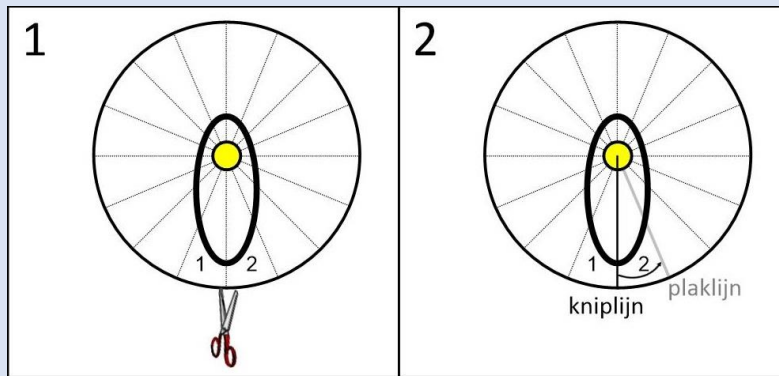
Tabel 1

Volgens de algemene relativiteitstheorie zullen zware objecten, zoals de zon, een merkbare kromming van de ruimtetijd tot gevolg hebben (linker afbeelding van figuur 5). Als gevolg van deze kromming zal de baan van Mercurius elke omwenteling een klein beetje draaien (rechter afbeelding van figuur 5). Hierin is $\Delta\phi$ de precessiehoek ten gevolge van de kromming van de ruimtetijd.



Figuur 5

Bij deze activiteit wordt de kromming nagebootst door van cirkelvormige stukjes (doorzichtig) papier kegels te maken (zie figuur 6) en deze op elkaar te plaatsen. In figuur 6 is de zon weergegeven, evenals de ellipsvormige baan van Mercurius. Merk op dat de excentriciteit van de baan sterk overdreven is.



Figuur 6

Voer de volgende opdrachten uit:

- Knip de eerste cirkel uit langs de aangegeven kniplijnen. Knip tevens langs de kniplijn tot aan het midden van de cirkel.
- Breng de ingeknipte rand van de cirkel (1) naar de rand met de plaklijn (2). Hierdoor ontstaat een kegel. Zorg ervoor dat de linker rand tot bij de plaklijn komt, zodat de losse randen elkaar overlappen.
- Plak nu de losse randen aan elkaar zodat je een kegel hebt.
- Knip de tweede cirkel uit langs de aangegeven kniplijnen. En herhaal de bovenstaande stappen.

Als het goed is dan heb je nu twee kegels met de zon in het centrum en de ellipsvormige baan van Mercurius. Merk op dat de baan van Mercurius nu niet meer sluitend is.

- Leg nu de twee kegels bovenop elkaar zodanig dat de ellipsbaan van de tweede kegel aansluit op de ellipsbaan van de eerste kegel.

2p1. Beschrijf duidelijk wat er gebeurt met de ellipsbaan van Mercurius.

Ruimte voor een antwoord:

2p2. Wat is de oorzaak van de perihelium precessie van Mercurius in dit schaalmodel?

Ruimte voor een antwoord:

2p3. Wat is de oorzaak van de perihelium precessie van Mercurius volgens de algemene relativiteitstheorie?

Ruimte voor een antwoord:

1p4. Leg duidelijk uit wat er gebeurt met de perihelium precessie wanneer de kromming toeneemt.

Ruimte voor een antwoord:

3. Rekenopgave

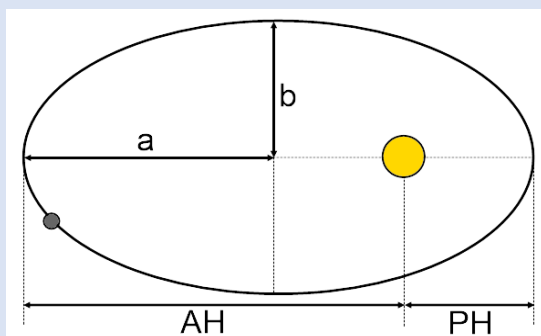
De omloopbaan van Mercurius kan worden beschreven met behulp van de excentriciteit e . De excentriciteit van een (ellips)baan kan worden gezien als de mate waarin de omloopbaan afwijkt van een cirkel. Voor een cirkel geldt dat $e = 0$. De excentriciteit e van een ellips(baan) is gedefinieerd als:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (1)$$

Hierbij wordt a de halve lange as genoemd en b is de halve korte as. De halve lange as a en de halve korte as b zijn weergegeven in figuur 5.

Verder geldt voor de halve korte as b het volgende:

$$b^2 = PH \cdot AH \quad (2)$$



Figuur 5

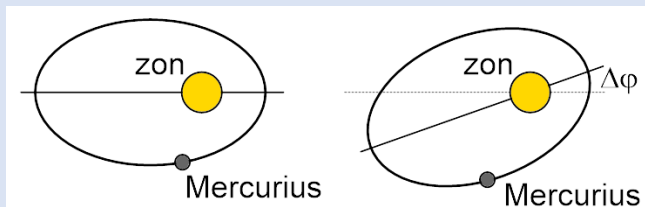
Met behulp van het computer model heb je de aphelium en perihelium van Mercurius kunnen bepalen. Op basis van die waarden kun je de excentriciteit van de baan bepalen.

Voor Mercurius geldt dat $PH = 46,00 \cdot 10^6$ km en $AH = 69,82 \cdot 10^6$ km.

3p6. Toon met behulp van een berekening aan dat de excentriciteit van Mercurius gelijk is aan $e = 0,2057$.

Ruimte voor een antwoord:

Volgens de algemene relativiteitstheorie zorgt de zon voor een kromming van de ruimtetijd. Als gevolg van deze kromming zal de baan van Mercurius elke omwenteling een klein beetje draaien (zie figuur 6). Hierin is $\Delta\varphi$ de precessiehoek ten gevolge van de kromming van de ruimtetijd.



Figuur 6

De perihelium precessie van Mercurius is volgens de algemene relativiteitstheorie met behulp van de volgende formule te berekenen:

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi \cdot G \cdot M}{a(1-e^2) \cdot c^2} \quad (3)$$

In deze formule is $\Delta\varphi$ de precessiehoek (in rad), G is de gravitatieconstante ($6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$), M massa van het hemellichaam (in kg), a is de halve lange as (in m), e is de excentriciteit (geen eenheid) en is c de lichtsnelheid (in m s^{-1}).

4p7. Bereken de perihelium precessie voor Mercurius per omwenteling. Geef je antwoord in booggraden.

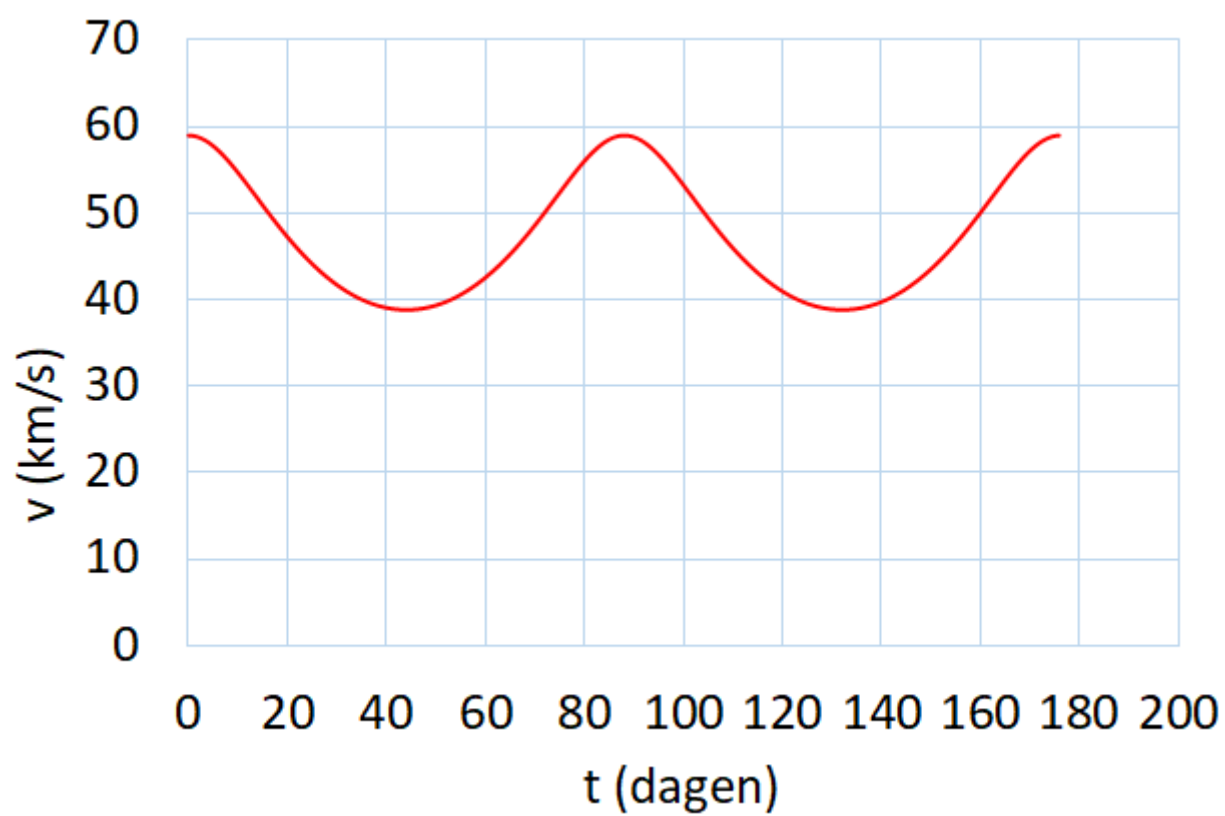
Ruimte voor een antwoord:

Einstein had berekend op basis van de algemene relativiteitstheorie dat de perihelium precessie van Mercurius overeen moest komen met 43 boogseconden per eeuw.

3p8. Toon met behulp van een berekening aan of Einstein gelijk had.

Ruimte voor een antwoord:

Uitwerkbijlage



Figuur 4